

ÉPREUVE N° 2

DURÉE : 2 heures – COEFFICIENT : 4

Le candidat traitera obligatoirement le sujet correspondant à l'option formulée dans sa d d'admission à concourir.

Il trouvera ces sujets aux pages suivantes du présent fascicule :

Page 3 – Mathématiques.

Page 5 – Comptabilité commerciale.

Page 7 – Géographie économique.

Page 7 – Droit commercial.

Page 7 – Droit civil.

PREMIER SUJET

SUJET DE MATHÉMATIQUES

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I, II et III sont indépendantes

I

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$, (où \ln désigne la fonction logarithme népérien), et soit (Γ) sa représentation graphique dans un plan \mathcal{P} ramené à un orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- A.1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f , que l'on notera D_f .
2. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de D_f .
 3. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée.
 4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
 5. Déterminer le nombre de réels α pour lesquels la fonction f s'annule et donner pour chacun un encadrement à 10^{-3} près, en indiquant la méthode utilisée pour déterminer celui-ci.
 6. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x) = x - \ln(x^2 - 1)$ sur $]1; +\infty[$;
 - a. Étudier la fonction g et démontrer qu'elle est positive.
 - b. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles on a : $f(x) - x \geq 0$.
 - c. Dédire des questions précédentes que pour tout x de $[\sqrt{2}; +\infty[$ on a :
$$x \leq f(x) < 2x.$$
 7. Construire (Γ) ainsi que les droites d'équations « $y = x$ » et « $y = 2x$ ».
- B. Soit h un réel et soit D la droite d'équation : $y = x + h$.
1. Montrer que pour tout réel h , la droite D coupe la courbe (Γ) en deux points M et M' distincts ; on précisera les coordonnées.
 2. Soit T la tangente à (Γ) en M , et T' la tangente à (Γ) en M' .
Montrer que les droites T et T' sont sécantes en un point I qui appartient à l'axe $(O\vec{j})$.
- C.1. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives des fonctions : $x \mapsto \ln(x - 1)$ et $x \mapsto \ln(x + 1)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
2. En déduire les primitives de f sur $]1; +\infty[$.

II

On organise une loterie avec plusieurs carnets identiques de 100 billets.

Dans chaque carnet :

- un des billets gagne 100 F ;
- deux des billets gagnent 50 F ;
- sept des billets gagnent 10 F ;
- les autres billets ne gagnent rien.

1. Une personne prend un billet au hasard dans un carnet complet. La variable aléatoire X est définie par le gain de ce joueur.
 - a. Établir la loi de probabilité de X .
 - b. Déterminer la probabilité de l'événement E « la personne gagne au moins 10 F ».
 - c. Calculer l'espérance $E(X)$.
2. On présente à une autre personne n carnets complets ($n \geq 1$) et cette personne choisit au hasard un billet dans chaque carnet.
Ces n choix sont supposés indépendants les uns des autres, et la probabilité de gagner est la même pour chaque carnet.
 - a. Quelle est la probabilité P_n pour que cette personne ait au moins un billet gagnant ?
 - b. Calculer le plus petit entier n tel que $P_n \geq 0,5$.
Interpréter le résultat.

III

On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_1 = 3$ et $4u_n = u_{n-1} + 12$ ($n > 1$),
 $v_n = u_n - 4$ ($n \geq 1$).

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n .
3. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ($n \geq 1$).
Calculer S_n en fonction de n et étudier la convergence de la suite (S_n) .